Resumo Expandido

QUANTIZAÇÃO EM 2-LOOP DO CAMPO ESCALAR VIA INTEGRAIS DE CAMINHO DE FEYNMAN

GIOVANE DE SOUZA SILVA (ICV-UFPI), PAULO RENATO SILVA DE CARVALHO (Orientador Depto. de Física - UFPI).

Introdução

Discutiremos o método de quantização via integrais de caminho por Feynman para o campo escalar onde usaremos suas regras junto com os seus diagramas para calcularmos a amplitude de espalhamento, propagador e estudar a teoria Φ^4.

Metodologia

O formalismo da integral de caminho da mecânica quântica é baseado diretamente da noção de um propagador K em que representa a amplitude de probabilidade para uma transição de q_i em t_i para q_f em t_f.

$$P\big(q_f t_f; q_i t_i\big) = |K(q_f t_f; q_i t_i)|^2 \qquad (1)$$

O propagador K é uma grandeza familiar $\langle \mathrm{q_f t_f} | \mathrm{q_i t_i} \rangle$, expressando a mesma como uma integral de caminho, ou seja, dividindo o intervalo de tempo em t_i e t_f em $(n+1)$ partes iguais de τ deixando na forma:

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \int \dots \int \mathrm{dq_1 dq_2 \dots dq_n} \langle q_f t_f | q_n t_n \rangle \langle q_n t_n | q_{n-1} t_{n-1} \rangle \dots \langle q_q t_q | q_i t_i \rangle. \ (2)$$

A integral é calculada sobre todas as trajetórias possíveis. Calculamos o propagador ao longo de um pequeno segmento da integral de caminho, assim temos:

$$\langle q_f t_f | q_n t_n \rangle = N \int \mathrm{Dq} \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \int_{\mathrm{t_i}}^{\mathrm{t_f}} \mathrm{L(p, \dot{p})}\right] \ (3)$$

Onde $L = T - V$ é a clássica lagrangiana.

Quantização da integral de caminho e regra de Feynman para campo escalar

Suponha que o campo escalar Φ (x) possua uma fonte J(x). Então podemos definir a transição na presença de vácuo-vácuo na presença da fonte J como:

$$Z_0[J] = N \exp \int \left[\frac{-i}{2} \int j(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy\right] \ (4)$$

Considerando o propagador de Feynman $\Delta_\mathrm{F}(\mathrm{x})$ possui uma representação em Fourier:

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \ \ (5)$$

Como a amplitude $Z_0[J]$ é uma função geradora para partículas livres em funções de Green, sendo:

$$G^n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z_0[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)}\bigg|_{J=0} \ (6)$$

Estas grandezas são chamadas de funções de n-pontos ou funções de Green. Vamos calcular as funções de 2 e 4 pontos.

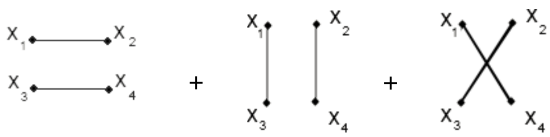
$$G^2(x_1, x_2) = -\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)}\bigg|_{J=0} = i\Delta_F(x_1 - x_2) \qquad (7)$$

Então a função de 4 pontos é:

$$G^4(x_1, \dots, x_4) = \begin{bmatrix} \Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(x_3 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_3)\Delta_F(x_2 - x_4) \\ +\Delta_F(x_1 - x_4)\Delta_F(x_2 - x_3) \end{bmatrix} \qquad (8),$$

E podem ser escritas

$G^4(x_1, \dots, x_4) =$

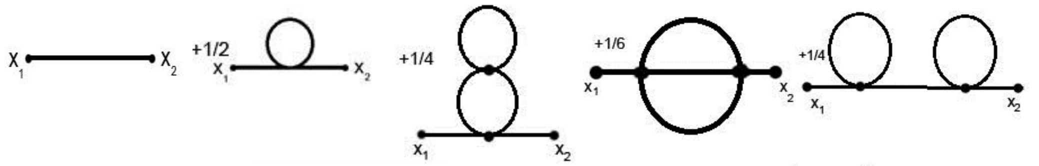


Com a interação da teoria Φ^4, Z$[J]$ fica na forma diagramática:

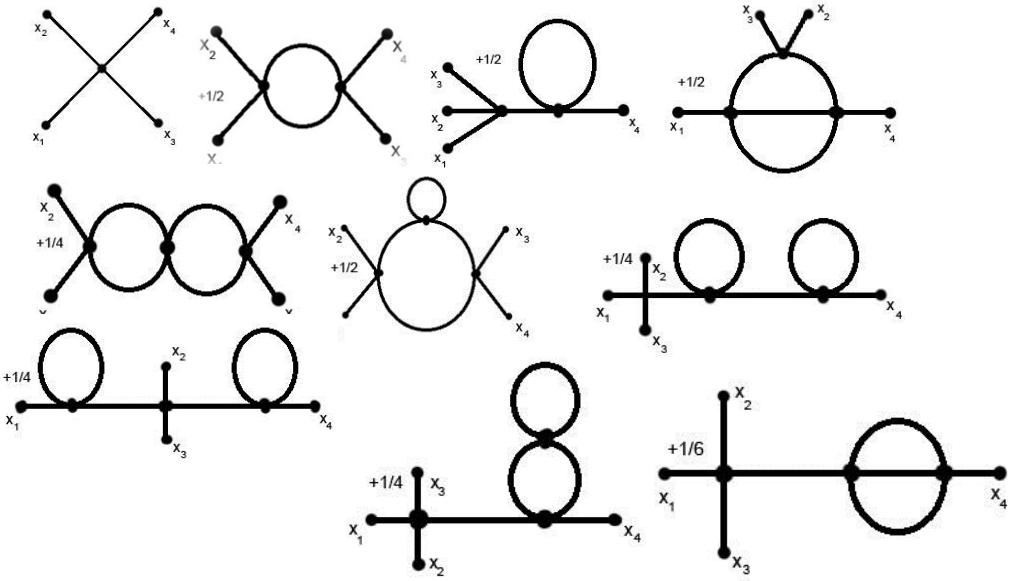
$Z(J) = \left[1 - \frac{ig}{4!} \int (6i\right.$  $+$  $\left.)dz\right] \exp\left(\frac{-i}{2} \int J \Delta_\mathrm{F} J\right)$ (9)

Onde temos a expansão da função geradora até a primeira ordem de *g*, para segunda ordem de *g* as funções de 2 e 4 pontos são representadas diagramaticamente:

$G(x_1, x_2) =$



$G(x_1 + \cdots + x_4) =$



Discussão

O método de integrais de caminho não fala sobre operadores. A propriedade quântica de um sistema ocorre por um movimento de partícula entre dois pontos onde estes podem prosseguir numa grande (infinita) variedades de trajetórias e cada um destas alternativas da sua contribuição à amplitude de transição pela equação (4).
Uma aplicação muito importante das integrais de caminho é vista em espalhamento como calcular amplitudes ou seções de choques de espalhamento em termos de propagador livre, onde a amplitude de espalhamento pode ser colocada em um conjunto de regras chamada regras de Feynman.
Assim o nosso objetivo é apresentar a quantização do campo escalar via integrais de caminho. Acharemos os propagadores deste campo e introduziremos a interação da teoria Φ^4 para acharmos as regras de Feynman para tal teoria que em resumo no espaço de coordenadas são:

- Propagador de Feynman $\Delta_F(x_1 - x_2)$ representado por uma linha; os termos com a fonte J são representados por uma linha com um ponto no final:
- Temos como $(-\mathrm{i}g)\ \int \mathrm{d}^4\mathrm{x}$ são representados diagramaticamente por: 

Que chamados de vértice onde possui a interação Φ^4.

- O propagador de uma partícula com $\Delta_F(0) = \Delta_F(x - x)$ são representados por um loop fechado:

São chamados diagrama de vácuo.

Os coeficientes numéricos que aparecem nos diagramas são conhecidos como fatores simétricos que representam o número de vezes que os diagramas aparecem. Sendo $\frac{S}{4!}$ um fator, um método de calcular os coeficientes dos diagramas é:

$$S = g2^{\beta}2^{d}\prod_{n}(n!)^{\alpha_n}$$

Onde: g → numero de troca de vértices que deixa o diagrama o mesmo.
β → número de linhas conectadas a si próprias.
α_n→número de par de vértices conectados por n linhas idênticas.
d→ número de loop duplos.

No espaço dos momentos as funções de n-pontos ficam da forma abaixo usando uma transformada de Fourier:

$$G^n(\boldsymbol{k_1},\dots,\boldsymbol{k_n}) = G(k_1)\dots G(k_n)(2\pi)^4\left(\sum_{i=1}^{n}k_i\right)\int\frac{dk_1}{(2\pi)^4}\dots\frac{dk_n}{(2\pi)^4}G(k_1)\dots G(k_n)$$

Então as regras de Feynman no espaço dos momentos ficam:

- Para cada vértice multiplica por  $= -ig$

- Para cada linha externa associada um propagador:

 $= \dfrac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$

- Por cada loop inclui a integral $\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k$ que tem relação com o conservação do momento pelo fator $2\pi^4\delta^4(k_1 + \dots + k_n)$.

Conclusão

Do tópico de integrais de caminho observamos que as múltiplas integrais das amplitudes de transições são calculadas para que possamos chegar a expressão dos propagadores do campo escalar e a partir da mesma mostrarmos as funções gerador e as funções de n-pontos onde calculamos as funções de 2 e 4 pontos com a interação Φ^4 sendo representadas com os diagramas de Feynman onde mostra o propagador, a criação e a aniquilação de partículas. Onde a soma de todos os diagramas dão a amplitude total de espalhamento.
Com as funções de n-pontos mostramos as regras de Feynman no espaço de coordenadas e no espaço dos momentos preservando sua conservação. Com isto vemos o método de integrais de caminho é uma ótima ferramenta para quantização de campo escalar.

Referencias

[1] Ryder, Lewis H. *Quantum Field Theory* – 2nd ed. 1996
[2] Arfken Georg B.,Weber Hans J. *Métodos Matemáticos para Engenharia e Física* 6nd Ed. 2007
[3] Greiner W. *Field Quantization* 3nd Ed. 2000
[4] H. Kleinert and V. Shulte-Frohlinde, *Critical Properties of Φ^4- Theories* July 15, 2008
[5] P. V. Dong, L. T. Hue, H. T. Hung, H. N. Long. *Symmetry Factors of Feynman Diagrams for Scalar Fields.* 15 Nov 2010.

Apoio: Agradecemos à UFPI

Palavras-chave: *Integral de Caminho, Programador e Diagrama de Feynman, Teoria Φ^4*.